ANNEXE : **Précisions mathématiques**

- Méthode de STUDENT :

Cette méthode sert à calculer l'incertitude élargie dans le cas d'une incertitude de type A.

L'incertitude est donnée par :

$$U = t_{\%} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

où : U est l'incertitude élargie, σ l'écart type, et $t_{\%}$un coefficient tabulé :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{95\%}$	12,7	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26
$t_{99\%}$	63.7	9,93	5,84	4,6	4,03	3,71	3,5	3,36	3.25

n	12	14	16	18	20	30	50	100	∞
$t_{95\%}$	2,2	2,16	2,13	2,11	2,09	2,04	2,01	1,98	1.96
$t_{99\%}$	3,11	3,01	2.95	2,9	2,86	2,76	2,68	2,63	2.57

$$g = f(l_1, l_2, l_3, \dots)$$

Quand une grandeur g se déduit d'autres grandeurs li par une formule mathématique :
Alors l'incertitude sur g se déduit des incertitudes sur les l_i de cette manière :

$$u(g) = \sqrt{\sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial l_i}\right]^2 u^2(l_i)}$$

Et on peut ainsi retrouver la formule de composition écrite dans la partie 2 sur les mesures indirectes :

$$C_2 = \frac{V_1}{V_2} C_1 = f(V_1, C_1, V_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial V_1} = \frac{C_1}{V_2} ; \frac{\partial f}{\partial C_1} = \frac{V_1}{V_2} ; \frac{\partial f}{\partial V_2} = -\frac{C_1 V_1}{V_2^2}$$

Donc, en utilisant l'équation précédente et en divisant le tout par C_2 (= C_1V1/V_2), on retrouve :

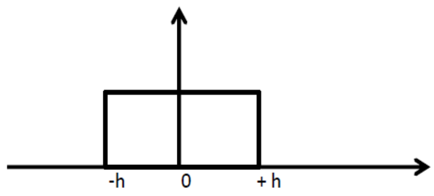
$$\frac{u(C_2)}{C_2} = \sqrt{\frac{u(V_1)^2}{{V_1}^2} + \frac{u(V_2)^2}{{V_2}^2} + \frac{u(C_1)^2}{{C_1}^2}}$$

- <u>Distribution des valeurs :</u>

On utilise ces distributions lorsque la mesure n'est pas exacte et que la répartition des erreurs n'est pas toujours la même. On peut approximer cette distribution de différentes manières :

→ *Distribution rectangulaire* :

On définit un intervalle, et les erreurs sont équiprobable dans cet intervalle (exemple : « L'erreur est comprise entre 1 et -1 », alors une erreur de 0.7 et une erreur de -0.2 ont la même probabilité d'arriver)

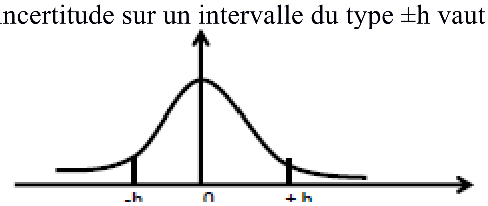


Dans ce cas-là, l'incertitude sur un intervalle du type ±h vaut : **h/√3**.
C'est le cas pour la plupart des incertitudes constructeur. Et il en va de même pour les graduations : la valeur est comprise entre X et X + *pas de graduation*, donc l'intervalle vaut : ±*pas de graduation*/2
donc l'incertitude vaut : *pas de graduation/(2√3)*

→ *Distribution normale :*

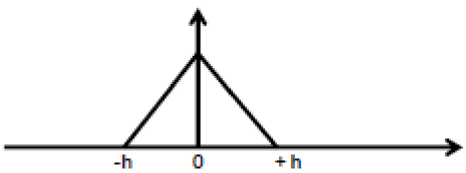
Dans ce cas, les erreurs sont supposées être plus souvent petites. Une erreurs plus grande aura moins de chance d'arriver, et la distribution est alors de la forme d'une gaussienne sur un intervalle.

Dans ce cas-là, l'incertitude sur un intervalle du type ±h vaut : **h/3.**



→ *Distribution triangulaire :*

C'est un compromis entre les deux distributions précédemment évoquées, l'incertitude sur un intervalle du type ±h vaut alors : **h/√6.**
Parfois utilisée pour les incertitudes constructeur d'appareils neufs.



- <u>Biais de l'écart-type :</u>

Sont décrites dans ce paragraphe quelques notions basiques de probabilités qui expliquent simplement l'origine de la formule que nous utilisons pour l'écart type, qui est légèrement différente de la formule plus connue.

Pour calculer la déviation, c'est-à-dire « l'écart à la moyenne » auquel on peut s'attendre pour une valeur prise dans une série statistique – écart très fortement corrélé à l'incertitude, on utilise ce que l'on appelle la variance de la série :

$$var = < (x - \mu)^2 >$$

Où < … > représente la moyenne de … sur la série, x les valeurs de la série et μ est la moyenne de la série statistique si on la connaît.
On écrit aussi cela :

$$var = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

Où N est le nombre de valeurs de la série et les xi sont les valeurs de la série.
Pour obtenir une grandeur de même unité que la grandeur mesurée, on introduit alors l'écart type σ:

$$\sigma = \sqrt{var}$$

Néanmoins, on connaît rarement μ, la « vraie » moyenne de la série statistique, celle que l'on attend en réalisant une infinité de mesures.

En fait, on connait une moyenne issue des termes de la série que l'on connaît que nous allons appeler m :

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$$

Et cela introduit un biais dans les statistiques.
En effet, l'espérance de la « variance » calculée en substituant m à μ n'est pas l'espérance attendue.
On attend : E(var) = V(x)
Où E est l'espérance, c'est-à-dire la valeur attendue – la moyenne « vraie » en quelque sorte, et V la variance.

→ *Relations utilisées et non démontrées (connues ou faciles à montrer) :*

(1) $V(x) = E(x^2) – E(x)^2$
(2) V(m) = I/N V(x) *en effet, la moyenne est censée varier "plus faiblement" que les valeurs de la série…*
(3) E(ax + by + cz + …) = aE(x) + bE(y) +cE(z) + … *où a,b,c sont des constantes, et x,y,z des valeurs de séries statistiques.*

On a donc :

$$E(var) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2\right)$$

Que l'on peut aussi écrire (en développant le carré):

$$E(var) = E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 - m^2\right)$$

Relation (3)

$$E(var) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E({x_i}^2) - E(m^2)$$

Or toutes les valeurs de la série ont évidemment la même espérance, on peut donc écrire plus simplement :

$$E(var) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(x^2) - E(m^2)$$

$E(x^2)$ ne dépend pas de i donc :

$$E(var) = E(x^2) - E(m^2)$$

Relation (1)

$$E(var) = (V(x) + E(x)^2) - (V(m) + E(m)^2)$$

Relation (2)

$$E(var) = (V(x) + E(x)^2) - \left(\frac{1}{N}V(x) + E(x)^2\right)$$

$$E(var) = \frac{N-1}{N}V(x)$$

D'où le fait que l'on multiplie par N/(N - 1) pour éliminer le biais, et change donc légèrement la variance pour donner un nouvel « écart type » sans biais :

$$\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2}$$